

Proposition de traitements dans différents contextes d'un même problème d'optimisation

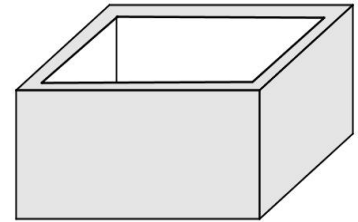
Ce problème a largement été étudié dans

*Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des Mathématiques au Lycée
Cahier spécial n° 4 de DIDIREM – Janvier 1998*

L'énoncé de référence :

Un maçon doit réaliser une cuve en béton parallélépipédique de base carrée de 20 cm d'épaisseur et pouvant contenir 4 m^3 . On désigne par x (en m) le côté du carré intérieur et par h (en m) la hauteur intérieure de la cuve.

On veut déterminer x et h pour que le volume de béton soit minimal.



La Cuve

Étude des variations d'une fonction par calcul formel

Niveau d'enseignement	Terminale Générale. Plus particulièrement adapté aux classes de terminale S
Type d'activité	Classe par groupes avec ordinateurs accessibles
Durée	1 heure avec préparation hors classe afin de réfléchir à une stratégie de résolution. La séance en classe permet alors un débat puis une mise en œuvre.
Outils	Un logiciel de calcul formel. Les copies d'écran proposées sont obtenues à l'aide du CAS MP-Reduce de GeoGebra 4.2. Il est probable qu'au moment de la publication, celui-ci ait été remplacé par GIAC, moteur de XCAS.
Compétences mathématiques	Modélisation fonctionnelle comme outil de résolution en première approche de la situation, Recherche du minimum par étude de la dérivée. Travail sur la forme des expressions algébriques. Théorème des valeurs intermédiaires
Prérequis TICE	L'exercice est ici traité avec le CAS de GeoGebra. Tout autre CAS est bien entendu utilisable. Connaissance des fonctionnalités de base d'un CAS : factorisation, déclaration de fonction, résolution d'équation ou d'inéquation, calcul de dérivée.
Place dans la progression, moment de l'étude	L'activité peut prendre sa place quand le théorème de la valeur intermédiaire et son corollaire ont été étudiés.
Forme(s) de calcul favorisée	Ici, l'élève doit élaborer une stratégie de résolution
Commentaires	<p>L'exercice est entièrement littéral, mais la mise en œuvre peut être identique à celle posée précédemment (voir les fichiers seconde et première sur le sujet) Bien entendu, l'épaisseur e ou le volume V peuvent être fournis sous forme numérique.</p> <p>Dans le cas où e est inconnu et $V = 4$, on obtient :</p> $f(x) := (x+2e)^2(4/(x^2)+e) - 4/x^2 x^2$ $\rightarrow f(x) := \frac{4e^3 x^2 + 4e^2 x^3 + 16e^2 + ex^4 + 16ex}{x^2}$ <hr/> <p>Dérivée[f(x),x]</p> $\rightarrow \frac{4e^2 x^3 - 32e^2 + 2ex^4 - 16ex}{x^3}$ <hr/> <p>Numérateur[2]</p> $\rightarrow 4e^2 x^3 - 32e^2 + 2ex^4 - 16ex$ <hr/> <p>Factoriser[3,x]</p> $\rightarrow 2e(x^2 + 2x + 4)(x + 2e)(x - 2)$ <p>...qu'il est facile de résoudre.</p>

Dans le second cas, on obtient :

$$f(x) := (x+2^*e)^2(v/(x^2)+e)-v/x^2*x^2$$

$$\rightarrow f(x) := \frac{4 e^3 x^2 + 4 e^2 v + 4 e^2 x^3 + 4 e v x + e x^4}{x^2}$$

Dérivée[f(x),x]

$$\rightarrow \frac{-8 e^2 v + 4 e^2 x^3 - 4 e v x + 2 e x^4}{x^3}$$

Numérateur[2]

$$\rightarrow -8 e^2 v + 4 e^2 x^3 - 4 e v x + 2 e x^4$$

Factoriser[3,x]

$$\rightarrow 2 e (-x^3 + 2 v) (-x - 2 e)$$

...qui permet de déboucher sur l'étude de l'équation $x^3 = 2v$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure sur l'existence et l'unicité de la solution $\sqrt[3]{2v}$

Remarques

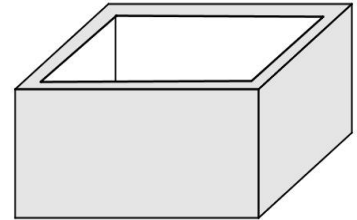
La fiche élève présente deux versions : la première où le volume est numérique et la seconde où le volume est donné sous forme littérale.

Il est possible de plus d'ouvrir encore le problème en laissant le choix de la variable aux élèves.

La cuve (version IV)

Un maçon doit réaliser une cuve en béton parallélépipédique de base carrée de e cm d'épaisseur et pouvant contenir 4 m^3 .

1. Exprimer le volume du béton nécessaire en fonction de la largeur intérieure x de la cuve.
2. Quelle dimension de la largeur intérieure de la cuve le maçon va-t-il proposer à ses clients ?



La cuve (version V)

Un maçon doit réaliser une cuve en béton parallélépipédique de base carrée de e cm d'épaisseur et pouvant contenir $v \text{ m}^3$.

1. Exprimer le volume du béton nécessaire en fonction de la largeur intérieure x de la cuve.
2. Quelle dimension de la largeur intérieure de la cuve le maçon va-t-il proposer à ses clients ?

