Rallye mathématique du Centre
Correction de l'épreuve officielle 2010

Exercice n°1 — Ça ne tourne pas rond !

5 points

Quand on écrit la spirale jusqu'au nombre 3^2 :

- Ce nombre est dans la case située 1 case à droite de 1 et 1 case plus haut que 1. $\left(\dfrac{3-1}{2}=1\right)$
- Il y a les 2 entiers qui le précèdent écrits dessous. $(3-1=2)$

Quand on écrit la spirale jusqu'au nombre 5^2 :

- Ce nombre est dans la case située 2 cases à droite de 1 et 2 cases plus haut que 1. $\left(\dfrac{5-1}{2}=2\right)$
- Il y a les 4 entiers qui le précèdent écrits dessous. $(5-1=4)$

Quand on écrit la spirale jusqu'au nombre 7^2 :

- Ce nombre est dans la case située 3 cases à droite de 1 et 3 cases plus haut que 1. $\left(\dfrac{7-1}{2}=3\right)$
- Il y a les 6 entiers qui le précèdent écrits dessous. $(7-1=6)$

Or $44^2 < 2010 < 45^2$

Quand on écrit la spirale jusqu'au nombre 45^2 :

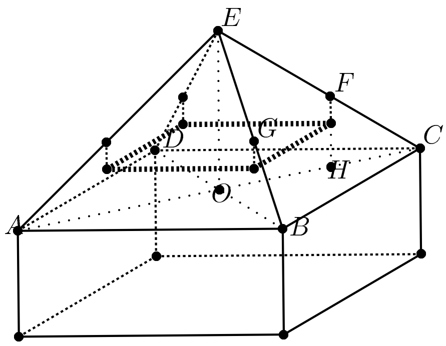
- Ce nombre est dans la case située 22 cases à droite de 1 et 22 cases plus haut que 1. $\left(\dfrac{45-1}{2}=22\right)$
- Il y a les 44 entiers qui le précèdent écrits dessous. $(45-1=44)$

$45^2 = 2025$ donc 2010 est situé 15 cases sous 45^2.

Donc 2010 est dans la case située 22 cases à droite de 1 et 7 cases plus haut que 1.

Exercice n°2 — « Et la lumière fut »

8 points

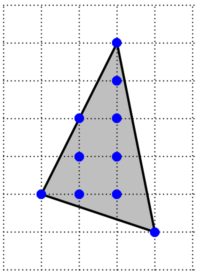


1.
   - En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B, on obtient : $AC = 10\sqrt{2}$ m donc $OC = 5\sqrt{2}$ m.
   - En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle EOC rectangle en O, on obtient : $EC = \sqrt{86}$ m.
   - F appartient à (EC), G appartient à (EB) et (GF) est parallèle à (BC) donc d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{EF}{EC} = \dfrac{EG}{EB} = \dfrac{FG}{BC}$ donc $\dfrac{EF}{\sqrt{86}} = \dfrac{7}{10}$ donc $EF = \dfrac{7\sqrt{86}}{10}$ m $\approx 6,5$ m.
   (et donc $FC = \sqrt{86} - \dfrac{7\sqrt{86}}{10} = \dfrac{3\sqrt{86}}{10}$ m)
   Les filins sont accrochés à 6,5 m du sommet de la pyramide.
2. Soit H le point de $[OC]$ tel que (FH) et (OC) soient perpendiculaires.
   - F appartient à (CE), H appartient à (CO) et (FH) et (EO) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès : $\dfrac{CF}{CE} = \dfrac{CH}{CO} = \dfrac{FH}{EO}$ donc $\dfrac{0,3\times\sqrt{86}}{\sqrt{86}} = \dfrac{FH}{\sqrt{86}}$ donc $FH = 1,8$ m.
   - $4 \text{ m} + 1,8 \text{ m} - 1 \text{ m} = 4,8$ m.
   Les néons sont à une hauteur du sol de $4,8$ m.

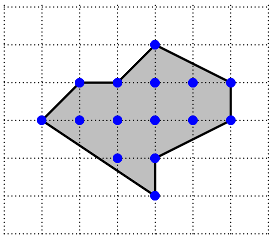
Exercice n°3 — Pick, l'as des carreaux

8 points

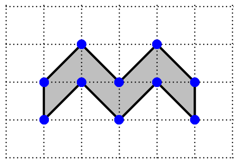
1. (a) 15 unités d'aire
   (b) $i = 9$, b=14 donc la formule donne le même résultat.
2. L'aire du triangle vaut 7 unités d'aires (déterminée grâce à de bons découpages). On a $i = 6$ et $b = 4$, donc la formule fonctionne ici.
3. $\mathscr{A} = 7$ et $b = 4$
   donc $i = 7 - \dfrac{4}{2} + 1 = 6$.



4. $\mathscr{A} = 10$. On veut dessiner un octogone donc $b \geq 8$. Je prends par exemple $b = 8$. Il faut donc $i = 10 - \frac{8}{2} + 1 = 7$



5. Pour l'aire minimale, on minimise b en se limitant au cas où il n'y a que les sommets comme points du quadrillage sur le bord ($b = 10$) et on choisis $i = 0$.



Exercice n°4 — Avocat (*Kfymkd*)

5 points (*5 zysxdc*)

Réponse : En 1985.
Traduction du texte de l'exercice : Vous savez certainement que le rallye mathematique du Centre fête ses vingt-cinq ans cette année. En quelle année a eu lieu la première épreuve officielle de ce prestigieux concours ?

Exercice n°5 — N'en jetons plus ...

5 points

1. Lorsque le jeton de centre Ω et de rayon R ne recouvre aucun noeud du quadrillage, celà signifie que pour tout noeud N du quadrillage, la distance ΩN est strictement supérieure à R, c'est à dire que Ω est à l'extérieur des disques de rayon R centrés sur les noeuds du quadrillage. Dans le cas suivant (voir figure 1) , pour illustrer, on fixe un rayon R « assez petit » et on trace les cercles de rayon R, centrés en A, B, C et D ; alors en choisissant un point Ω quelconque appartenant au carré $ABCD$ mais hors des disques dessinés, on obtient un jeton ne recouvrant aucun des sommets. Le cas limite est (voir figure 2) où le rayon vaut la moité de la longueur de la diagonale du carré soit $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \times 4 = 2\sqrt{2}$ cm.

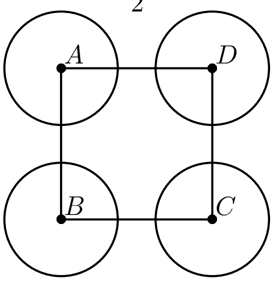


Figure 1

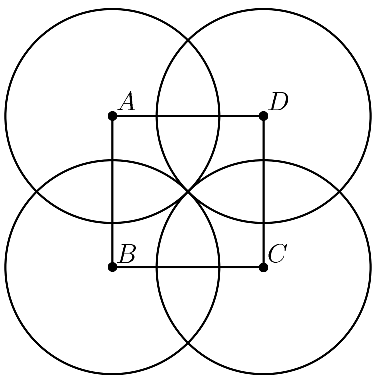


Figure 2

2. Les figures 3 a,b,c et d illustrent les différentes possibilités. 2,3,4 ou 5 noeuds peuvent être recouverts par un jeton.

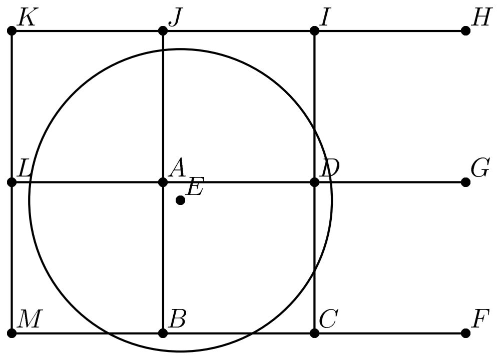


Figure 3 - a

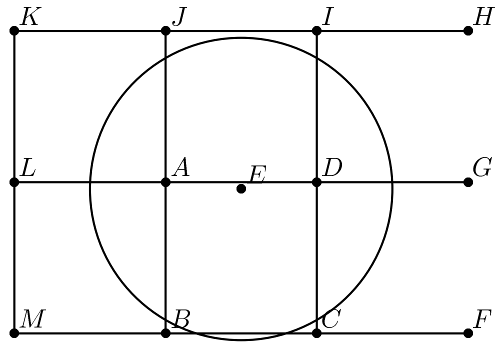


Figure 3 - c

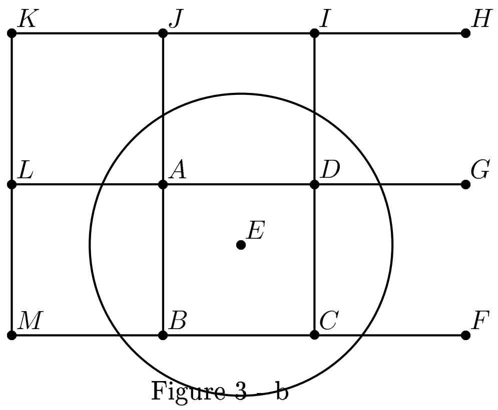


Figure 3 - b

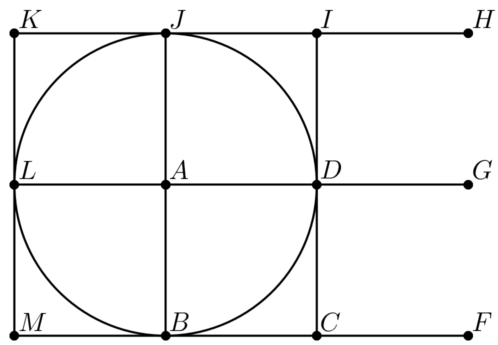


Figure 3 - d

3. On détermine les régions du carré $ABCD$ auxquelles les centres des jetons appartiennent en fonction du nombre de noeuds recouverts. Pour celà, on trace les cercles dont les centres sont les noeuds du quadrillage et de rayon 4 cm (voir figure 4) . Tout point situé dans l'intérieur de la région délimitée par les points E, F, G, I se trouve à une distance inférieure ou égale à 4 cm des noeuds A, B, C et D, donc tout jeton centré en un tel point recouvrira 4 noeuds. De même, on compte aussi 3 noeuds recouverts pour tout jeton dont le centre est situé dans l'intérieur de « BHF », 2 noeuds pour tout jeton dont le centre est situé dans l'inétrieur de « BHC », et enfin tout jeton centré en un sommet recouvrira 5 noeuds.
   Il faut comparer les aires des régions défines à la question précédente.
   En appelant x l'aire de la région $EFHI$, y l'aire de la région BFH et z l'aire de la région « BFA », on trouve : $x+4y+4z=16$ et $y+2z=16-\frac{\pi}{4}\times 16=(1-\frac{\pi}{4})\times 16$.
   On calcule z en s'appuyant sur la figure 5 : on trace le cercle de centre C et de rayon 4 cm. L'angle $\widehat{BCF}$ vaut $\dfrac{\pi}{6}$ donc l'aire de l'arc de cercle BCF vaut $\dfrac{\pi}{12}\times 16=\dfrac{4\pi}{3}\ cm^2$. Comme $CI=2$ et $JF=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, l'aire du triangle rectangle CJF vaut $2\times\sqrt{3}\ cm^2$, d'où l'aire de la région $BFI=\dfrac{z}{2}=8-\dfrac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$, soit $z=16-\dfrac{8\pi}{3}-4\sqrt{3}\approx 0.694$, et de là $y\approx 2.045$ et $x\approx 5.044$. Ainsi on a plus de chance d'obtenir 3 noeuds car $4\times y>x>4\times z$.

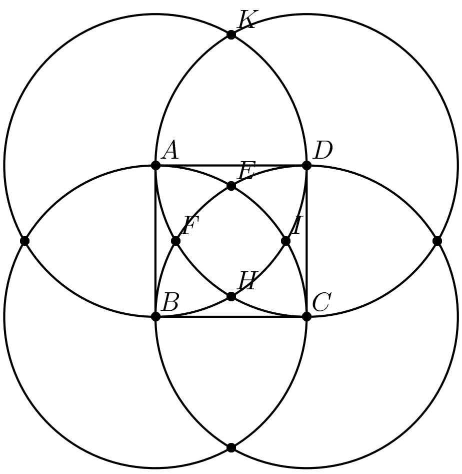
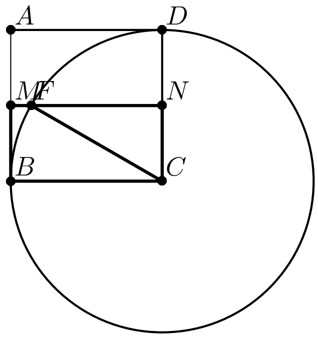


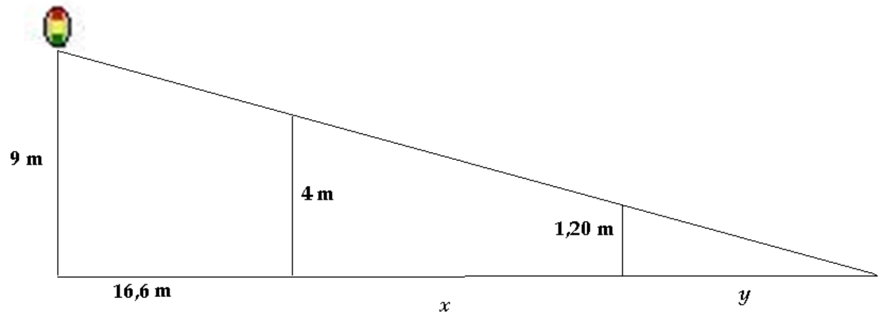
Figure 4

Figure 5, M milieu de [AB



Exercice n°6 **Verra verra pas**

5 points



Configuration de Thalès :

$\dfrac{1,2}{y} = \dfrac{4}{x+y} = \dfrac{9}{19,6+x+y}$

$\dfrac{1,2}{y} = \dfrac{4}{x+y}$ donne $1,2x + 1,2y = 4y$ d'où $1,2x - 2,8y = 0$

$\dfrac{1,2}{y} = \dfrac{9}{19,6+x+y}$ donne $23,52 + 1,2x + 1,2y = 9y$ d'où $1,2x - 7,8y = -23,52$

Il faut donc résoudre le système :

$\begin{cases} 1,2x - 2,8y = 0 \\ 1,2x - 7,8y = -23,52 \end{cases}$

On trouve $x = 10,98$ m et $y = 4,7$ m.

Le conducteur doit être arrêté à presque 11 m derrière la remorque du camion.

Exercice n°7 **Bien tenté**

5 points

1. On applique le théorème de Pythagore pour trouver les dimensions du triangle formant l'entrée de la tente. C'est un triangle isocèle de côté 2,5 m et de hauteur 1 ; D'où le volume du prisme : $2,1 \times 1 \times \sqrt{2.5^2 - 1^2} \approx 4,8$.
2. De même : $2,1 \times 2 \times \sqrt{2.5^2 - 2^2} \approx 6,3$.
3. En prenant x pour hauteur de piquet, avec x compris entre 0 et 2.5, on trouve que l'aire du triangle d'entrée est donnée par $2,1x\sqrt{2.5^2 - x^2}$ dont les variations sur $[0\ ;\ 2,5]$ sont les mêmes que $x^2(2.5^2 - x^2)$.
   On trouve la forme canonique : $x^2(2.5^2 - x^2) = -(x^2 - 2.5^2/2)^2 + 2,5^4/2$. D'où l'aire maximum pour $x = 2.5/\sqrt{2}$.

Exercice n°8 **Nono le robot**

5 points

1. C'est le programme n°2 qui permet à nono de rejoindre l'étoile.
2.