BACCALAURÉAT GENERAL
EPREUVE SPECIFIQUE DES SECTIONS EUROPENNES
MATHEMATIQUES – ALLEMAND

Titel : *Kapital und Kultur*
Thema : ZAHLENFOLGEN

Corrigé du sujet 5

Ce corrigé comporte deux pages.

Übung 1 :

a) Für jede n natürliche Zahl, $n > 0$ ist $a_{n+1} = 3.a_n$, also ist (a_n) eine geometrische Zahlenfolge mit $q = 3$. Man kann auch bemerken, dass 4.3^{n-1} die explizite Bildungsvorschrift einer geometrischen Zahlenfolge mit $a_1 = 4$ und $q = 3$ ist.

b) Die Zahlenfolge ist geometrisch und positiv mit $q > 1$. Also ist sie (streng) wachsend.

c) •

$$4.3^{n-1} = 356 \quad | \div 4$$
$$3^{n-1} = 89 \quad | \ \lg$$
$$\lg(3^{n-1}) = \lg(89)$$
$$(n-1) \lg(3) = \lg(89) \quad | \div \lg(3)$$
$$n - 1 = \frac{\lg(89)}{\lg(3)} \quad | \ +1$$
$$n = \frac{\lg(89)}{\lg(3)} + 1 \approx 5{,}086$$

Diese Zahl ist keine natürliche Zahl. Deswegen ist 356 kein Glied der Zahlenfolge (a_n).

Oder… $324 = a_5 < 356 < a_6 = 972$ und (a_n) ist streng wachsend. So ist man sicher, dass 356 kein Glied der Zahlenfolge (a_n) ist.

•

$$4.3^{n-1} = 236\,196 \quad | \div 4$$
$$3^{n-1} = 59\,049 \quad | \ \lg$$
$$\lg(3^{n-1}) = \lg(59\,049)$$
$$(n-1).\lg(3) = \lg(59\,049) \quad | \div \lg(3)$$
$$n - 1 = \frac{\lg(59\,049)}{\lg(3)} \quad | \ +1$$
$$n = \frac{\lg(59\,049)}{\lg(3)} + 1 = 11$$

11 ist eine natürliche Zahl. Deswegen ist 236 196 ein Glied der Zahlenfolge (a_n) : $a_{11} = 236\,196$.

Oder … $4.3^{11-1} = 236\,196$. Also ist 236 196 ein Glied der Zahlenfolge (a_n) : $236\,196 = a_{11}$.

d) 100. a_n ist die Anzahl der Bacillen während der n-ten Stunde. Man möchte wissen wann

$$100.\,a_n > 1\,000\,000 \quad | \div 100$$
$$a_n > 10\,000$$

also

$$4.3^{n-1} > 10\,000 \quad | \ \lg$$
$$\lg(4.3^{n-1}) > \lg(10\,000)$$
$$(n-1).\lg(3) > \lg(10\,000) \quad | \div \lg(3)$$

$$n - 1 > \frac{\lg(10\,000)}{\lg(3)} \qquad | +1$$

$$n > \frac{\lg(10\,000)}{\lg(3)} + 1 \approx 9{,}38$$

also $\quad n \geq 10$

Ab der zehnten Stunde gibt es mehr als eine Million Bacillen in dem Kulturmedium.

<u>Übung 2</u> :

Wenn K_n dem Kapital im n-ten Jahr entspricht, hat man :

$K_1 = 3\,000$

und

$K_{n+1} = K_n \,.\, (1+z)$ für jedes Jahr n

z ist in dieser Gleichung der Zinssatz

Also ist (K_n) eine geometrische Zahlenfolge mit $q = 1+z$. Die explizite Bildungsvorschrift einer solchen Zahlenfolge ist : $K_n = K_1 .\ (1+z)^{n-1} = 3\,000\ .\ (1+z)^{n-1}$

Man möchte hier : $K_{15} = 6\,000$ d.h. $3\,000\ .\ (1+z)^{15-1} = 6\,000$

Also

$$3\,000.(1+z)^{14} = 6\,000 \qquad | \div 3\,000$$

$$(1+z)^{14} = 2 \qquad | \ \lg$$

$$\lg[(1+z)^{14}] = \lg(2)$$

$$14.\ \lg(1+z) = \lg(2) \qquad | \div 14$$

$$\lg(1+z) = \frac{\lg(2)}{14} \qquad | \ \exp$$

$$1+z = e^{\frac{\lg(2)}{14}} \qquad | -1$$

$$z = e^{\frac{\lg(2)}{14}} - 1 \approx 0{,}0507 \approx 5{,}1\%$$

Beachte : Man könnte auch unmittelbar Werte von z proben :

$3\,000.(1+5\%)^{14} < 6\,000 < 3\,000.(1+6\%)^{14}$ also $5\% < z < 6\%$

$3\,000.(1+5{,}0\%)^{14} < 6\,000 < 3\,000.(1+5{,}1\%)^{14}$ also $5{,}0\% < z < 5{,}1\%$

$3\,000.(1+5{,}07\%)^{14} < 6\,000 < 3\,000.(1+5{,}08\%)^{14}$ also $5{,}07\% < z < 5{,}08\%$

Antwort : Damit ein Kapital von 3 000 € im 15. Jahr verdoppelt wird, muβ der Zinssatz gleich 5,1% sein. Es ist auch natürlich der Fall für irgendwelchen Betrag des Kapitals.